

Konkurs Matematyczny "Problemata" - zadania

Zadanie 1. Znajdź wszystkie pary (x, y) liczb całkowitych, które spełniają równanie:

$$y^2 + 2y = x^2 + 4x.$$

Zadanie 2. Znajdź największą liczbę rzeczywistą a o tej własności, że nierówność

$$x + y + z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq a$$

jest spełniona przez wszystkie liczby rzeczywiste $x, y, z > 0$.

Zadanie 3. Udowodnij, że dowolnym czworokącie suma długości jego przekątnych jest mniejsza od jego obwodu.

Czy istnieje czworokąt którego obwód wynosi 4.02cm natomiast suma długości jego przekątnych wynosi 4cm ?

Zadanie 4 Czy istnieje liczba nieparzysta $n > 1$ o tej własności, że liczba $2^n + 1$ jest liczbą pierwszą ?

Zadanie 5. Wykonując mnożenie wyrażeń algebraicznych sprawdź, że zachodzi poniższa równość:

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 - xy + y^2 - yz + z^2 - xz).$$

Wykorzystując powyższą równość udowodnij, że prawdziwa jest nierówność

$$\frac{x + y + z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$$

dla wszystkich $x, y, z > 0$, przy czym równość w tej nierówności zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y = z$.

Zadanie 6. Czy istnieje prostopadłościan, którego pole powierzchni całkowitej wynosi 600cm^2 , zaś jego objętość przekracza jeden litr?